

Algebra1 Intenzív verzió

3. gyakorlat

2013. szeptember 24.

1. Hányszoros gyöke az $x^4 - x^3 - x + 1$ polinomnak az $x = 1$?
2. Ha az 1 pontosan ötszörös gyöke f -nek és hatszoros gyöke g -nek, akkor hányszoros gyöke $f + g$ -nek, illetve $f + g + fg$ -nek?
3. Bizonyítsuk be, hogy a $\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ polinomnak nincs többszörös gyöke.
4. Osszuk el maradékosan az $x^3 - 2$ polinomot a $2x^2 + 2x - 3$ polinommal.
5. Egy $f \in \mathbb{C}[x]$ polinom $x - 1$ -gyel osztva 2-t, $x - 2$ -vel osztva 1-et ad maradékul. Mennyi a maradék $(x - 1)(x - 2)$ -vel osztva?
6. Osszuk el maradékosan az $(x \sin \alpha + \cos \alpha)^n$ polinomot az $x^2 + 1$ polinommal. Mi lesz a maradék?
7. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{C}[x]$ -ben teljesül $(x^n - 1, x^k - 1) = x^{(n,k)} - 1$. Bizonyítsuk be, hogy $(a^n - 1, a^k - 1) = a^{(n,k)} - 1$ az egész számok körében, ahol $a > 1$ egész szám. Mi a kapcsolat a két állítás között?
8. Mutassuk meg, hogy véges test nem lehet algebrailag zárt.
9. Az egységsugarú körbe írt szabályos n -szög egyik csúcsából a többi csúcsba húzott szakaszok hosszát összeszoroztuk. Mennyi az eredmény?
10. Van-e olyan egész együtthatós f polinom, melyre $f(10) = 400$, $f(14) = 440$ és $f(18) = 520$?
11. Ha az $f \in \mathbb{Z}[x]$ polinom négy különböző egész helyen is felveszi az 5 értéket, akkor felveheti-e egy egész helyen a 12-t?

Nehezebb feladatok

12. Igazoljuk, hogy az $x \mapsto \sin x$ és az $x \mapsto 1/x$ függvény nem polinomfüggvény.
13. Hány 3-mal *nem* osztható együtthatója van az $(x + 1)^{730}$ polinomnak?
14. Mutassuk meg, hogy az $x^3 + px + q$ polinomnak pontosan akkor van többszörös gyöke, ha $4p^3 + 27q^2 = 0$.

15. Legyen $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{2n}x^{2n}$ olyan (páros fokú) polinom, mely a “feje tetejére állítva is önmaga”, azaz $a_i = a_{2n-i}$ minden $0 \leq i \leq n$ esetén és $a_0 \neq 0$. Mutassuk meg, hogy $f(x)x^{-n}$ felírható $x + 1/x$ polinomjaként.
16. Legyenek $p_0, \dots, p_{n-1} \geq 0$, $\sum_{k=0}^{n-1} p_k > 0$. Bizonyítsuk be, hogy a $z^n - p_{n-1}z^{n-1} - \dots - p_1z - p_0 = 0$ egyenletnek pontosan egy pozitív gyöke van.
17. Legyen z_0 a $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$ ($a_k \in \mathbb{C}$) polinom gyöke. Bizonyítsuk be, hogy $|z_0| \leq \zeta$, ahol ζ a $z^n - |a_{n-1}|z^{n-1} - \dots - |a_0|$ polinom egyetlen pozitív zérushelyét jelöli.
18. Legyen $0 < p_n < p_{n-1} < \dots < p_0$. Bizonyítsuk be, hogy a $p_nz^n + \dots + p_1z + p_0$ polinomnak nincsen gyöke a $|z| \leq 1$ egységkörlapon.