

Algebra1 Intenzív verzió

2. gyakorlat

2013. szeptember 17.

1. Fejezzük ki $\cos x$ és $\sin x$ segítségével $\sin 7x$ -et. Általánosítsunk.
 2. Mennyi az n -edik egységgyökök szorzata? És a négyzetösszege?
 3. Milyen összefüggés van ε és $-\varepsilon$ rendje között?
 4. Ha ε primitív 512-edik egységgyök, mennyi lehet $-i\varepsilon$ rendje?
 5. Legyenek m és n pozitív egészek.
 - a) Hány közös gyöke van az $x^n = 1$ és az $x^m = 1$ egyenletnek?
 - b) Igazoljuk, hogy egy m -edik és egy n -edik egységgyök szorzata mindig mn -edik egységgyök.
 - c) Milyen m és n párra lesz egy primitív n -edik és egy primitív m -edik egységgyök szorzata primitív mn -edik egységgyök?
-
6. Az alábbi struktúrák gyűrűk-e? Ha igen, kommutatívak-e, egységelemesek-e, nullosztómentesek-e, testek-e?
 - a) $\{a+bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, $\{a+bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, $\{a+b\sqrt[3]{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, $\{a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ a szokásos összeadásra és szorzásra nézve.
 - b) Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények halmaza a pontonkénti összeadásra és szorzásra.
 - c) Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények halmaza a pontonkénti összeadásra és a kompozícióra, mint szorzásra.
 - d) Egy X halmaz összes részhalmaza, ahol az összeadás a szimmetrikus differencia képzése, a szorzás pedig a metszetképzés. (Két halmaz szimmetrikus differenciája azokból az elemekből áll, amelyek a két halmaz közül pontosan egyben vannak benne.)
 - e) A 3-dimenziós tér vektorai az összeadásra és a (i) skaláris (ii) vektoriális szorzásra nézve.
 7. Igazoljuk, hogy tetszőleges gyűrűben $0r = r0 = 0$, és $(-r)s = -(rs)$.
 8. Igazoljuk, hogy tetszőleges gyűrűben $(-a) \cdot (-b) = ab$.
 9. Igazoljuk, hogy ha van egységelem, akkor az összeadás kommutativitása következik a többi gyűrűaxiómából.
-

Nehezebb feladatok

10. Lefedhető-e a 100×100 -as sakktábla 8×1 -es dominókkal?
11. Legyen p egy prímszám és $S = \sum_{j=0}^{p-1} \varepsilon^{j^2}$, ahol ε primitív p -edik egységgyök. Mennyi S^2 ?
-
12. Legyen R egy kommutatív, egységelemes gyűrű.
- a) Bizonyítsuk be, hogy ha az $R[x]$ polinomgyűrű definíciójában a változó negatív kitevős hatványait is megengedjük (de összesen csak véges sok tagot), akkor egy gyűrűt kapunk. Ezt a gyűrűt a Laurent-polinomok gyűrűjének nevezik, és $R[x, x^{-1}]$ -szel jelölik. Mik $K[x, x^{-1}]$ invertálható elemei, ha K test?
 - b) Bizonyítsuk be, hogy ha a polinomok sorozatos definíciójában nem kötjük ki, hogy $a_n = 0$ minden elég nagy n -re, akkor is gyűrűt kapunk. Ennek a gyűrűnek a neve a formális hatványsorok gyűrűje, jelölés: $R[[x]]$. Mik $K[[x]]$ invertálható elemei, ha K test?
 - c) Bizonyítsuk be, hogy ha a polinomok sorozatos definíciójában nem kötjük ki, hogy $a_n = 0$ minden elég nagy n -re, és megengedünk *véges sok* negatív kitevőjű tagot is, akkor is gyűrűt kapunk. Ennek a gyűrűnek a neve a formális Laurent-sorok gyűrűje, jelölés: $R((x))$. Igazoljuk, hogy $K((x))$ test, ha K test.
 - d) Gyűrűt kapunk-e, ha a polinomok definíciójánál végtelen sok negatív és végtelen sok pozitív kitevős tagot is megengedünk?
13. Bizonyítsuk be, hogy egy legalább kételemű, véges, nullosztómentes gyűrű ferdetest.