Algebra1 Intenzív verzió

10. gyakorlat

2013. november 26.

1. Mutassuk meg, hogy az alábbi polinomok irreducibilisek $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{Z}$ fölött. Rajzoljuk le a Newton-poligonjukat is (alkalmas prímet használva). $6x^4 + 3x + 1$, $x^5 + 3x^4 + 36x^2 + 54x + 9$, $x^7 + 32$, $x^n + x^{n-1} + 3$, $x^n + 3x + 27$.

2. Irreducibilisek-e az alábbi polinomok a $\mathbb{Q}$ test fölött? $3x^7 - 6x^6 + 6x^2 + 3x - 2$, $3x^7 + x^6 + 6x^2 + 2x - 2$, $3x^7 - 6x^6 + 6x^2 + 2x - 2$, $x^{16} + 1$, $x^{16} + 2$, $x^4 - 14x^2 + 9$, $x^4 - x^2 + 1$, $3x^7 + 6x - 18$, $x^5 + 4$, $x^3 + 9$, $x^5 + 729$, $x^{10} - x^5 + 1$, $x^{20} + 20$, $x^4 + 25$, $x^6 + 32$, $x^4 + 4x + 1$, $x^4 - 2x + 1$, $x^4 + x^3 + 1$, $x^4 + x^3 + 4$, $x^4 + x^3 + x^2 + 1$.

3. Annak felhasználásával, hogy $x^3 - 2$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, mutassuk meg, hogy $\sqrt[3]{4}$ nem írható föl $a + b\sqrt[3]{2}$ alakban, ahol $a, b \in \mathbb{Q}$.

4. Legyen $f(x,y) = x^9 + x^3y^3 + y^2 + y \in \mathbb{C}[x,y]$, és jelölje $\mathbb{C}(y)$ a $g(y)/h(y)$ alakú racionális törtfüggvényekből álló testet ($g, h \in \mathbb{C}[y]$).
   (a) Primitív-e f, mint $\mathbb{C}[y]$ fölötti polinom?
   (b) Következik-e a Schönemann-Eisenstein-tételből, hogy f irreducibilis $\mathbb{C}(y)$ fölött?
   (c) Irreducibilis-e f a $\mathbb{C}[x,y]$-ban?

5. Rajzoljuk le $y^2 + xy - x$ (mint y polinomjának) Newton-poligonját v_x-re nézve. Alkalmas n-re fejtsük $x^{1/n}$ hatványsorába az $y^2 + xy - x = 0$ egyenlet mindkét ($y_1(x)$, ill. $y_2(x)$) megoldását.

6. Bontsuk irreducibilis faktorokra az $(x+y+z)^k - x^k - y^k - z^k$ polinomot $k = 3$ és $k = 5$ esetén.

7. Igazoljuk, hogy ha $n > 1$ páratlan, akkor $\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x)$.

8. Határozzuk meg a Φ_n körosztási polinom együtthatóinak összegét.

9. Legyenek $m \mid n$ pozitív egészek úgy, hogy n minden prímosztója osztja m-et is. Igazoljuk, hogy $\Phi_n(x) = \Phi_m(x^{n/m})$. Számítsuk ki a prímhatvány-indexű körosztási polinomokat.

10. Mutassuk meg, hogy a prímhatvány indexű körosztási polinomok alkalmas eltoltjára teljesül a Schönemann-Eisenstein-kritérium feltétele, ami ebben a speciális esetben új bizonyítást ad az irreducibilitásra.

Nehezebb feladatok

11. Van-e olyan pozitív egész szám n, melyre $\Phi_n(x)$-nek van 1-nél nagyobb abszolút értékű együtthatója?

12. (Kombinatorikai nullhelytétel.) Tegyük fel, hogy a K test feletti $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ polinom azonosan nulla az $S_1 \times \ldots S_n \subseteq K^n$ halmazon (ahol egyik S_i sem üres). Legyen $g_i(x_i) = \prod_{s \in S_i}(x_i - s)$. Mutassuk meg, hogy f felírható $\sum_{i=1}^n h_i g_i$ alakban, ahol mindegyik $h_i \in K[x_1, \ldots, x_n]$ polinom foka legfeljebb $\deg(f) - \deg(g_i)$.

13. Legyen p prímszám és G egy hurokélmentes gráf, melyben minden pont foka legfeljebb $2p-1$, és a fokszámok átlaga nagyobb, mint $2p-2$. Igazoljuk, hogy G-nek van olyan nem üres részgráfja, ahol minden pont foka p.

14.* Igazoljuk, hogy $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{C}((x^{1/n}))$ egy algebrailag zárt test (azt is be kell látni, hogy test, de ez nem annyira nehéz).