Algebra1 Intenzív verzió – megoldások

1. ZH

2013. október 22.

1. $\frac{z_1+z_2}{2} \pm i\frac{z_1-z_2}{2}$.

2. Írjuk az egyenletet $f(x)\frac{p(x)}{(p(x),q(x))} + h(x)\frac{q(x)}{(p(x),q(x))} = 1$ alakba. Ekkor f és h minden közös osztója osztója a bal oldalnak, tehát az 1-nek is, azaz $(f(x), h(x)) = 1$.

3. Gauß-eliminálva az

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 3 \\ & & (1-r)y & + & (2-r)z & = & 7-3r \\ & & & & (4-r)z & = & 12-3r \end{array}$$

egyenletrendszert kapjuk. Tehát ha $r \neq 1$ és $r \neq 4$, akkor a megoldás egyértelmű, hiszen minden oszlopban lesz vezéregyes. Ha $r = 1$, akkor a fenti második és harmadik egyenlet ellentmond egymásnak, tehát nincs megoldás. Ha viszont $r = 4$, akkor nem lesz tiltott sor a harmadik, a második sorban pedig lesz vezéregyes, tehát végtelen sok megoldás van. Célhoz érhetünk úgy is, hogy az együtthatókból álló mátrix determinánsát számoljuk ki.

4. Mivel f-nek pontosan 2-szeres gyöke a 0, h-nak pedig pontosan 4-szeres, ezért $f(x) = ax^2 + bx^3 + cx^4$ és $h(x) = dx^4$ alakba írható, ahol $a \neq 0 \neq d$. Ekkor $f(x)^2 + h(x) = (a^2 + d)x^4 + 2abx^5 + (b^2 + 2ac)x^6 + 2bcx^7 + c^2x^8$. Tehát az $x = 0$ minimum 4-szeres gyök, és legfeljebb 8-szoros (kivéve, ha $f^2 + h = 0$, ami elő is fordulhat pl. $f(x) = x^2$ és $h(x) = x^4$ választással). 4-szeres gyök lehet: pl. $a = d = 1$ választással. Ha legalább 5-szörös gyök a 0, akkor $d = -a^2$ kell legyen, és ez elégséges is. Innentől feltehetjük ($\neq 0$ konstanssal szorozva), hogy $a = -d = 1$. Pontosan akkor 5-szörös a gyök multiplicitása, ha $b \neq 0$. 6-szoros akkor lehet, ha $b = 0$, de $b^2 + 2ac = 2c \neq 0$, ezt is el tudjuk érni. Viszont minimum 7-szeres csak úgy lehet, hogy $b = 0$ és $0 = b^2 + 2ac = 2c$, ekkor viszont minden tag 0 és $f^2 + h = 0$.

5. A válasz: végtelen, vagy olyan szám, ami 3-mal osztható, de 9-cel nem. Nyilván lehet z rendje végtelen, tehát tegyük fel, hogy z rendje $0 < n \in \mathbb{Z}$. Legyen z szöge $\frac{2k\pi}{n}$, ahol $(k, n) = 1$. Ekkor $z^3\varepsilon$ szöge $2\pi\frac{9k\pm n}{3n}$, hiszen ε szöge $\pm 2\pi/3$. A feladat feltétele az, hogy $\frac{9k\pm n}{3n}$ egyszerűsített alakjában a nevező n. Ez azt jelenti, hogy $3 = (9k \pm n, 3n)$, speciálisan $3 \mid n$. Írjuk tehát n-et $n = 3m$ alakban. Ekkor $3 = (9k \pm 3m, 9m)$, azaz $1 = (3k \pm m, 3m)$. Speciálisan $3 \nmid m$, azaz $9 \nmid n$. Ezek mind meg is felelnek, hiszen $3k \pm m$-nek és m-nek nem lehet 3-tól különböző közös prímosztója, hiszen $p \mid m$ és $p \mid 3k + m$ esetén $p \mid 3k$, azaz $p \mid k$ $(p \neq 3)$, node $(k, 3m) = (k, n) = 1$.

6. Legyen $S = \sum_{k=0}^{1006} \frac{(-1)^k}{3^k}\binom{2013}{2k+1}$. Ekkor $S = \sum_{k=0}^{1006} \frac{i^{2k}}{\sqrt{3}^{2k}}\binom{2013}{2k+1}$, azaz

$$\frac{i}{\sqrt{3}}S = \sum_{k=0}^{1006} \frac{i^{2k+1}}{\sqrt{3}^{2k+1}}\binom{2013}{2k+1} = i\mathrm{Im}\left(1 + \frac{i}{\sqrt{3}}\right)^{2013} .$$

Áttérve a trigonometrikus alakra $1+\frac{i}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$, azaz

$$\frac{i}{\sqrt{3}}S=i\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2013}\sin\frac{2013\pi}{6}\ .$$

Rendezve, és észrevéve, hogy $\sin\frac{2013\pi}{6}=\sin\frac{9\pi}{6}=-1$, azt kapjuk, hogy $S=-\frac{2^{2013}}{3^{1006}}$.

7. Keressük X-et $aI+bE$ alakban, ahol I az egységmátrix, E pedig a csupa egyes mátrix. Ekkor az egyenlet $(I+E)(aI+bE)=3I+E$ alakba írható. Vegyük észre, hogy mivel I az egységmátrix, ezért $EI=IE=E$, és $I^2=I$. Továbbá $E^2=nE$ a mátrixszorzás képletéből. Tehát azt kapjuk, hogy $aI+(a+b+nb)E=3I+E$. Így $a=3$, $b=-\frac{2}{n+1}$ jó lesz. *Megjegyzés:* Ez az egyetlen megoldás, hiszen az $I+E$ mátrix invertálható. Az inverze nem más, mint $I-\frac{1}{n+1}E$. *Hogyan lehet arra rájönni, hogy X-et $aI+bE$ alakban keressük?* Több lehetséges módszer létezik. Az egyik, hogy kis n-ekre megoldjuk a feladatot (már $n=2$ is segít), és észrevesszük, hogy ilyen szerkezetű lesz a megoldás (akár a képletet is megsejthetjük ebből). A másik pedig, hogy észrevesszük, hogy az $aI+bE$ alakú mátrixok nemcsak az összeadásra nézve, hanem a szorzásra nézve is zártak, tehát a mátrixgyűrű egy részgyűrűjét alkotják. Ha ebben a részgyűrűben $I+E$ invertálható, akkor kész is vagyunk, ezt kell csak megnézni.