# Algebra1 Intenzív verzió

1. ZH

2013. október 22.

A maximális pontszám minden feladatra 1 pont. A ZH jegye a pontszám egészrésze. Használni egy, kézzel írott $A_4$-es lapot lehet – viszont semmi mást (pl. számológépet, mobiltelefont) nem. A rendelkezésre álló idő 100 perc. Minden beadott lapon szerepeljen a szerző neve. Mindenkinek eredményes feladatmegoldást kívánok!

1. Adjuk meg annak a négyzetnek a másik két csúcsát, melynek két átellenes csúcsát $z_1$ és $z_2$ komplex számok alkotják.

2. Ha $f(x)p(x) + h(x)q(x) = (p(x), q(x))$ valamely $f, h, p, q \in K[x]$ polinomokra, akkor mi lehet $(f(x), h(x))$?

3. Az $r$ (valós) paraméter mely értékire lesz az alábbi egyenletrendszernek 0, 1, ill. végtelen sok valós megoldása?
$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 3 \\ rx & + & y & + & 2z & = & 7 \\ x & + & ry & + & 3z & = & 8 \end{array}$$

4. Legyen $f(x), h(x) \in \mathbb{C}[x]$ két, legfeljebb negyedfokú polinom. Az $f$-nek pontosan 2-szeres gyöke a 0, a $h$-nak pedig 4-szeres. Hányszoros gyöke lehet $f(x)^2 + h(x)$-nek a 0? Minden lehetséges esetre adjunk is példát.

5. Legyen $z$ egy olyan komplex szám, melyre $z$ és $\varepsilon z^3$ rendje egyenlő, ahol $\varepsilon$ egy primitív harmadik egységgyök. Mennyi lehet $z$ rendje?

6. Írjuk fel zárt alakban a $\sum_{k=0}^{1006} \frac{(-1)^k}{3^k} \binom{2013}{2k+1}$ összeget.

7. Adjunk meg olyan $X$ $n \times n$-es valós mátrixot, melyre
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 4 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 4 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 4 \end{pmatrix}$$